Profesor:
Fortunato Mendoza

PITAGORAS
ACADEMIA

ARITMÉTICA

GRUPO PITÁGORAS

TEORIA DE NÚMEROS

NÚMEROS PRIMOS II

ESTUDIO DE LOS DIVISORES DE UN NUMERO

Sea la descomposición canónica de "N" :

$$N = A^a \cdot B^b \cdot C^c \ldots\ldots(dc)$$

1. Cantidad de divisores de N ($CD_{(N)}$)

$$CD(N) = (a+1)(b+1)(c+1)$$

Ejemplo

Hallar la cantidad de divisores de 360

Resolución:

Como $360=2^3.3^2.5^1$

$CD(360) = (3+1)(2+1)(1+1)$

$CD(360) = 4.3.2 = 24$

2. Suma de Divisores de un Número N (SD(N))

$$SD_N = \frac{A^{a+1}-1}{A-1} \cdot \frac{B^{b+1}-1}{B-1} \cdot \frac{C^{c+1}-1}{C-1}$$

Ejemplo:

Calcular la suma de los divisores de 360

Resolución:

$360=2^3.3^2.5^1$

$SD(360)=\left(\frac{2^4-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^3-1}{3-1}\right)\left(\frac{5^2-1}{5-1}\right)$

$SD(360)=15.13.6$

$SD(360)=1170$

3. Suma de las inversas de los divisores de N (SID(N))

Ejemplo:

Calcular la suma las inversas de los divisores de 360

Resolución:

$Div(360): 1; 2; 3; ---; 120; 180; 360$

$SID_{(360)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + --- + \frac{1}{120} + \frac{1}{180} + \frac{1}{360}$

$= \frac{360 + 180 + 120 + --- + 3 + 2 + 1}{360}$

$SID_{(360)} = \frac{SD_{(360)}}{360} = \frac{1170}{360} = \frac{13}{4}$

En general:

$$SID(N) = \frac{SD(N)}{N}$$

4. Producto de los divisores de N (PD(N))

Ejemplo:

Calcular el producto de los divisores de 360

Resolución:

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \rightarrow CD_{(360)} = 24$

$PD_{(360)} = 1 \times 2 \times 3 \times --- \times 120 \times 180 \times 360$

$PD_{(360)} = \underbrace{360 \times 360 \times 360 \times ----}_{\frac{CD_{(360)}}{2}\ (12\ veces)} = 360^{12}$

$PD_{(360)} = 360^{\frac{CD_{(360)}}{2}}$

En general:

$$PD_N = \sqrt{N^{CDN}} = N^{CD(N)/2}$$

TEMAS COMPLEMENTARIOS

I. Número de formas de expresar un número natural N como el producto de dos factores (F(N))

Ejemplo 1 :
Del número : $24 = 2^3 . 3 = \begin{cases} 1 . 24 \\ 2 . 12 \\ 3 . 8 \\ 4 . 6 \end{cases}$ 4 formas

par

$CD(24) = 8 \rightarrow F(24) = \frac{8}{2} = 4$

Ejemplo 2 :
Del número : $100 = 2^2 . 5^2 = \begin{cases} 1 . 100 \\ 2 . 50 \\ 4 . 25 \\ 5 . 20 \\ 10 . 10 \end{cases}$ 5 formas

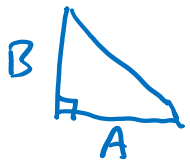
impar

$CD(100) = 9 \rightarrow F(100) = \frac{9+1}{2} = 5$

Aplicación:

Determinar cuántos triángulos rectángulos de catetos enteros tienen como área $450u^2$

Resolución:



$\frac{A.B}{2} = 450$

$A \times B = 900$

$\left.\begin{array}{l} 1 \times 900 \\ 2 \times 450 \\ 3 \times 300 \\ \vdots \end{array}\right\}$ 14 formas

Obs $900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$

$CD(900) = 27 \rightarrow F(900) = \frac{27+1}{2} = 14$

RPTA: 14

II. FUNCIÓN EULER O INDICADOR DE UN NÚMERO (Φ(N))

La función Euler de un número entero positivo "N", denotado como Φ(N) nos determina la cantidad de números menores que "N" y que son primos entre sí con N .

Ejemplo:

¿Cuántos números menores que 15 son primos entre si con 15?

Resolución:

Sea K uno de los #,

$K < 15$; K y 15 son PEsí

Como $15 = 3 \times 5 \rightarrow K \neq \overset{\circ}{3}; \overset{\circ}{5}$

Luego $K = 1; 2; 4; 7; 8; 11; 13; 14 \Rightarrow 8$ #s

RPTA: 8

En general:

Sea : $N = A^a . B^b . C^c .....(dc)$

$$\boxed{\Phi(N)=A^{a-1}(A-1)B^{b-1}(B-1)C^{c-1}(C-1)}$$

Ejemplo:

$15 = 3^1.5^1$

$$\varphi(15) = 3^0(3-1).5^0(5-1) = 8$$

Aplicación

¿Cuántos números menores que 360 son primos relativos con 360?

Resolucíón

Piden $\varphi(360)$

$360=2^3.3^2.5^1$

$$\varphi(360) = 2^2\ (2-1).3^1(3-1).5^0(5-1)$$

$\varphi(360) = 96$ $\qquad$ $Rpta$: 96

Aplicación con factoriales

Ejemplo

Calcular los exponentes de 2 y 3 en la descomposición canónica de 20!

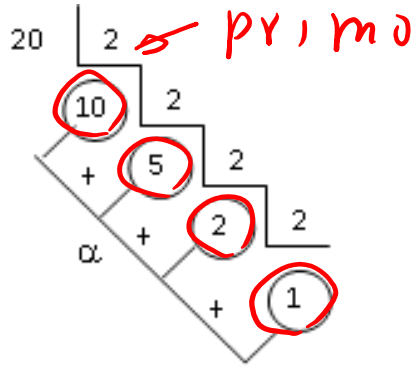
Resolución:

Se sabe que

20!= 1x2x3x4x5x……x20

$20! = 2^{\alpha} \times 3^{\beta} \times 5^{\delta} \times 7^{d} \ldots\ldots \times 19$ 1

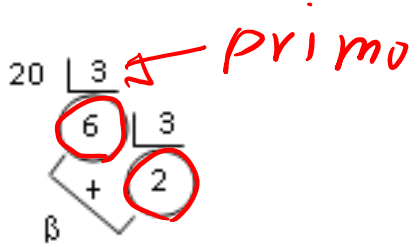
Para calcular el exponente de 2, se divide 20 sucesivamente entre 2



$\alpha = 10+5+2+1$

$\alpha = 18$

Para calcular el exponente de 3, se divide 20 sucesivamente entre 3



$\beta = 6 + 2$

$\beta = 8$

NÚMEROS PRIMOS

Aplicación

Calcular en cuántos ceros termina 200!

Resolución:

$200! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 200$

$200! = 10^{n} \cdot K = \overline{\cdots X \underbrace{00\cdots0}_{n \text{ cf}}}$

$K \neq 10$

Como $10 = 2 \times 5$

$200 \,|\, 2$: 100, 50, 25, 12, 6, 3, 1

$200 \,|\, 5$: 40, 8, 1

$200! = 2^{197} \cdot 5^{49} \times Q = 2^{49} \times 5^{49} \times \underbrace{2^{148} \cdot Q}$

$200! = 10^{49} \cdot K = \overline{\cdots X \underbrace{00\cdots0}_{49 \text{ cf}}}$

RPTA: 49

Aplicación

Calcular en cuántos ceros termina 300! cuando se convierte a base 14

Resolución:

$300! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 300$

$300! = 14^{n} \times K$

Como $14 = 2 \times 7$

$300 \,|\, 7$: 42, 6 $\rightarrow n = 48$

$300! = 14^{48} K = \overline{\cdots X \underbrace{00\cdots0}_{48 \text{ cf}}}_{(14)}$

RPTA: 48

NÚMEROS PRIMOS

TEOREMA DE FERMAT

Sea "N" entero positivo y "p" primo, donde $N \neq \dot{p}$; se cumple:

$$\boxed{N^{(p-1)k} = \dot{p} + 1}$$

Ejemplo:

Para p =7; N = 25

Se cumple: $25^{6k} = \dot{7} + 1$

TEOREMA DE EULER - FERMAT

Si A y B son primos entre si, se cumple:

$$\boxed{A^{\emptyset(B)} = \dot{B} + 1}$$

Ejemplo:

$25 = 5^2$

$\emptyset(25) = 5^1(4) = 20$

Para A = 16 ; B = 25

Se cumple: $16^{\emptyset(25)} = \dot{25} + 1$

$16^{20} = \dot{25} + 1$

TEOREMA DE WILSON

Si "p" es un número primo, se cumple:

$$\boxed{(p-1)! + 1 = \dot{p}}$$

Ejemplo:

Para p = 7

Se cumple: $6! + 1 = \dot{7}$

$720 + 1 = \dot{7} \rightarrow 721 = \dot{7}$ ✓

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

01. Determinar un número que solamente admita como factores primos a 3 y a 5, sabiendo que la suma de todos sus divisores es 3751.

A) 2025 B) 1125 C) 6075
B) 4275 E) 4050

Resolución:

Sea el # N

$N = 3^{\alpha} \times 5^{\beta}$

Dato: $SD_{(N)} = 3751$

$$\left(\frac{3^{\alpha+1}-1}{3-1}\right)\left(\frac{5^{\beta+1}-1}{5-1}\right) = 121 \times 31$$

Obs $\alpha = 4$; $\beta = 2$

$N = 3^4 \times 5^2 \rightarrow N = 2025$

$$\begin{array}{r|l} 3751 & 11 \\ 341 & 11 \\ 31 & 31 \\ 1 & \end{array}$$

Si $\beta = 1$ ✗

Si $\beta = 2$

$\alpha = 4$

02. Calcular la suma de los divisores m5 de 2400.

A) 5064 B) 7560 C) 4896
D) 8016 E) 7236

Resolución:

$2400 = 2^5 \times 3^1 \times 5^2$

Son $\dot{5}$

$2400 = 5[\underbrace{2^5 \times 3^1 \times 5^1}]$

Se cumple

$SID_{\dot{5}}(2400) = \left(\frac{2^6-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^2-1}{3-1}\right)\left(\frac{5^2-1}{5-1}\right) \times 5$

$= 63 \times 4 \times 6 \times 5$

$SID_{\dot{5}}(2400) = 7560$

$2400 = 5[\underbrace{2^5 \times 3^1 \times 5^1}_{K}]$

$SID_{\dot{5}}(2400) = SID(K) \times \frac{1}{5}$

$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\right) \times \frac{1}{5}$

$= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots\right)$

04. Si el producto de los divisores de un número es $2^{18}.3^{12}$. Halle Ud. la suma de las inversas de los divisores de dicho número.

A) $\frac{65}{24}$ B) $\frac{67}{24}$ C) $\frac{71}{24}$

D) $\frac{73}{24}$ E) $\frac{77}{24}$

Resolución:

Sea el # N

Dato: $PD_{(N)} = 2^{18} \cdot 3^{12}$

$N^{\frac{CD(N)}{2}} = (2^3 \cdot 3^2)^6 \rightarrow N = 2^3 \cdot 3^2$

$CD_{(N)} = 12$

Piden

$SID_{(N)} = \frac{SD(N)}{N} = \frac{\cancel{15}^{5} \times 13}{\cancel{72}_{24}} = \frac{65}{24}$

$SD_{(N)} = \left(\frac{2^4-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^3-1}{3-1}\right)$

$SD_{(N)} = 15 \cdot 13$

11. Se construye la tabla de divisores de un número y se observa que es de 3 filas por 3 columnas y que la suma de los divisores de la diagonal que contiene a 1 es 463. Calcule el producto de los divisores de dicho número.

A) 42^9 B) 63^4 C) 35^4

~~D)~~ 21^9 E) 36^9

Resolución:

Sea el # N → $N = \underbrace{A^2 \cdot B^2}_{D.C.}$ → 9 div

Tabla de divisores

	1	A	A^2
B^2 — B	B	AB	A^2B
B^2 — B^2	B^2	AB^2	A^2B^2

Dato: $1 + AB + A^2B^2 = 463$

$\underbrace{AB}_{21}(\underbrace{1+AB}_{22}) = 462 \rightarrow A=3$, $B=7$

Luego $N = 3^2 \cdot 7^2$

Piden $PD_{(N)} = N^{\frac{CD(N)}{2}}$

$= (3^2 \cdot 7^2)^{\frac{9}{2}}$

$= 3^9 \cdot 7^9$

$= 21^9$

Tabla de divisores

Ejm Sea el # 360

1°) $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \rightarrow 24$ div

2°) Tabla de divisores

	1	2	4	8
3^2 — 3	3	6	12	24
3^2 — 9	9	18	36	72
5	5	10	20	40
5	15	30	60	120
5	45	90	180	360

13. Sabiendo que el producto de los divisores de un número es $3^{12} \times 5^{18}$, calcule dicho número e indique como respuesta su cifra de mayor orden.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución:

14. Calcule la suma de las cifras de un número entero N, sabiendo que admite sólo dos divisores primos, que el número de sus divisores simples y compuestos es 6 y la suma de ellos es 124.

A) 15 B) 18 C) 12
D) 9 E) 10

Resolución:

N tiene solo 2 div. primos

$CD_{(N)} = 6 \rightarrow N = \underbrace{A^1 \times B^2}_{D.C.} \rightarrow 6$ div.

$SD_{(N)} = 124$

$\left(\frac{A^2-1}{A-1}\right)\left(\frac{B^3-1}{B-1}\right) = 4 \times 31 \rightarrow A=3;\ B=5$

Luego $N = 3^1 \times 5^2 = 75 \rightarrow \Sigma cfs = 12$

$$\begin{array}{r|l} 124 & 2 \\ 62 & 2 \\ 31 & 31 \\ 1 & \end{array}$$

03. Calcular la suma de las inversas de los divisores de 3150 que son primos con 2541

A) 1,86 B) 1,88 D) 1,90
D) 1,92 E) 1,94

Resolución:

$3150 = 2 \times \cancel{3^2} \times 5^2 \times \cancel{7}$ $\qquad 2541 = 3 \times 7 \times 11^2$

Obs: los divisores a considerar no deben ser $\vdots 3$; ni $\vdots 7$; ni $\vdots 11$

Se cumple

$SID_{(3150)} = SID_{(50)} = \dfrac{SD_{(50)}}{50}$

(PESI con 2541)

$= \dfrac{3 \times 31}{50} = \dfrac{93}{50} = 1{,}86$

$SD_{(50)} = \left(\dfrac{2^2-1}{2-1}\right)\left(\dfrac{5^3-1}{5-1}\right)$

19. ¿Cuántos números menores que 3600 son primos relativos con 3600?

A) 240 B) 360 C) 480
D) 600 E) 960

Resolución:

Piden $\phi_{(3600)}$

1°) $3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$

2°) $\phi_{(3600)} = 2^3(1) \cdot 3^1(2) 5^1(4)$

$= 8 \times 1 \times 3 \times 2 \times 5 \times 4$

$\phi_{(3600)} = 960$

RPTA: 960

06. Hallar N, sabiendo que :
$N = p^4 \cdot q^2$ (p y q son primos diferentes), y existen 1 080 números menores que N y que son primos relativos con él.

A) 1 680 B) 1 840 C) 2 016
D) 2 025 E) 3 020

Resolución:

$N = \underbrace{p^4 \cdot q^2}_{D.C.}$

Dato $\phi_{(N)} = 1080$

$p^3(p-1)\,q^1(q-1) = 3^3(2) \cdot 5^1(4)$

Obs $p = 3$; $q = 5$

$N = 3^4 \cdot 5^2 \rightarrow N = 2025$

1080	2 ×5
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5^1$

08. Calcule el residuo de dividir 127^{134} entre 23

A) 1 B) 2 C) 5

D) 6 E) 8

Resolución:

Sea $127^{134} = \dot{23} + r \rightarrow r = ?!$

Obs Como 23 es primo y $127 \neq \dot{23}$

Por el T. de Fermat

$127^{22} = \dot{23} + 1$

Luego

$127^{134} = (127^{22})^6 \cdot 127^2 = (\dot{23}+1)^6(\dot{23}+12)^2$

$= (\dot{23}+1)(\dot{23}+6)$

$127^{134} = \dot{23} + 6 \rightarrow r = 6$

$$\boxed{A^{p-1} = \dot{p} + 1}$$

p: primo y $A \neq \dot{p}$

$127 \,\underline{|23}$
$12 \quad 5$

$144 \,\underline{|23}$
$\underline{138} \quad 6$
6

09. Halle las tres últimas cifras al expresar 1087^{723} en el sistema senario.

A) 1; 3; 3 B) 2; 3; 1 C) 1; 3; 1
D) 3; 3; 1 E) 2; 3; 1

Resolución:

$1087^{723} = \overline{\ldots XYZ}_{(6)} = \dot{216} + \overline{XYZ}_{(6)}$

Obs Como 1087 y 216 son PEsi

Por el T. de Euler

$1087^{\phi(216)} = \dot{216}+1 \rightarrow 1087^{72} = \dot{216}+1$

Luego

$1087^{723} = (1087^{72})^{10} \times 1087^{3}$

$1087^{723} = (\dot{216}+1)^{10} \cdot (\dot{216}+7)^{3}$

$= (\dot{216}+1)(\dot{216}+127)$

$1087^{723} = \dot{216}+127 \rightarrow \overline{XYZ}_{(6)} = 127$

$\overline{XYZ}_{(6)} = 331_{(6)}$

$127 \,|\, 6$
$1 \quad 21 \,|\, 6$
$3 \quad 3$

$X=3;\ Y=3;\ Z=1$

Clave: D

10 Hallar el residuo que se obtiene al dividir 34! entre 37 .

A) 1 B) 5 C) 13

D) 18 E)20

Resolución:

Sea $34! = \overset{\circ}{37} + r \rightarrow r = ??$

Como 37 es primo

Por el T. de Wilson: $36! + 1 = \overset{\circ}{37}$

$34!\,35 \cdot 36 = \overset{\circ}{37} - 1$

$34!(\overset{\circ}{37} - 2)(\overset{\circ}{37} - 1) = \overset{\circ}{37} + 36$

$2 \cdot 34! = \overset{\circ}{37} + 36$

$34! = \overset{\circ}{37} + 18 \rightarrow r = 18$

T. de Wilson

Si p es primo

$\rightarrow (p-1)! + 1 = \overset{\circ}{p}$

Ejemplo

Para $p = 11 \rightarrow 10! + 1 = \overset{\circ}{11}$

Para $p = 5 \rightarrow 4! + 1 = \overset{\circ}{5}$

12. Calcule el menor número N tal que la suma de sus divisores propios es 49 y que además tiene 6 divisores de los cuales 3 son compuestos. Indique como respuesta la suma de las inversas de los divisores de N.

A) 1,653 B) 1,856 C) 1,706
D) 1,583 E) 1,678

Resolución:

16. Al convertirse 200! al sistema de base 14, ¿en cuántos ceros termina?

A) 32 B) 33 C) 34
D) 35 E) 36

Resolución:

18. Sabiendo que 80! tiene "n" divisores, ¿cuántos divisores tiene 81!?

A) $\frac{41n}{39}$ B) $\frac{10n}{9}$ C) $\frac{40n}{39}$

D) $\frac{41n}{37}$ E) $\frac{43n}{39}$

Resolución:

$80! \longrightarrow n$ div.

$81! \longrightarrow ??$

Como $81! = 80!\,81$ ← 3^4

$80! = 3^{\alpha} \cdot K$

$80 \,\underline{|3}$ → $80! = 3^{36} \cdot K \rightarrow n$ div

$26 \,\underline{|3}$

$8 \,\underline{|3}$

2

$37 \cdot CD(K) = n$

$CD(K) = \frac{n}{37}$

Luego $81! = (3^{36} \cdot K)\,3^4$

$81! = 3^{40} \cdot K$

Piden

$CD(81!) = 41\,CD(K) = 41\frac{n}{37}$

17. Sabiendo que N tiene "n" divisores, ¿cuántos divisores tiene 343N?

$$N = 49 \times 50 \times 51 \times .... \times 342$$

A) $\frac{51n}{49}$ B) $\frac{52n}{49}$ C) $\frac{53n}{49}$

D) $\frac{5n}{7}$ E) $\frac{9n}{7}$

Resolución:

20. Determine la suma de las tres últimas cifras al expresar 50^{489} en el sistema nonario.

A) 10 B) 11 C) 13
D) 15 E) 17

Resolución:

05. Si Sara calcula la cantidad de rectángulos que tienen lados enteros y como área $360\,m^2$; cuando en realidad se le preguntaba por la cantidad de polígonos regulares de lado entero que tienen como perímetro 360 m. ¿ En cuantas unidades se equivocó Sara?

A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 16

Resolución:

07. ¿Cuántos números desde 180 hasta 2160 son coprimos con 360?

A) 528 B) 530 C) 542
D) 560 E) 584

Resolución:

15. Si al producto de dos números primos diferentes, mayores que 2, se les resta 73, resulta un número que tiene 16 divisores, de los cuales 13 son compuestos. Sabiendo que este producto es menor que 1 100, calcule la suma de dichos números primos, si es la mayor posible.

A) 60 B) 66 C) 62
D) 70 E) 64

Resolución:

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS